

Παράδειγμα 2

Esu unobivado $\Delta \subseteq X \times Y$ ovprigezan Sibetis q'Edn.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΝΤΥΒΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΕΓΓΕΙΝΩ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΕΣΤΩ X, Y ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΔΥΟ ΣΥΝΟΛΑ.

- ΜΙΑ ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΕΓΓΕΙΝΩ $f \subseteq X \times Y$ ΟΥΚΕΙΤΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΝ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΙΣ ΕΞΗΣ 2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) ΓΙΑ ΚΑΘΕ $a \in X$ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ $b \in Y : (a, b) \in f$

2) ΑΝ $(a, b_1) \in f$ ΚΑΙ $(a, b_2) \in f$ ΤΟΤΕ $b_1 = b_2$

- ΑΠΟ ΤΗΝ 2) ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ΤΟ b ΓΙΑ ΤΟ ΟΠΟΙΟ $(a, b) \in f$ ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΟΔΙΚΟ. ΑΠΟ ΤΟ b ΤΟ ΟΥΚΕΙΤΑΙ ΕΙΚΟΝΑ ΤΟΥ a ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΖΟΥΜΕ $f(a) = b$. ΓΡΑΦΟΥΜΕ ΤΟΤΕ ΟΤΙ $f: X \rightarrow Y$

- ΑΝ x, y, z ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΟΛΑ ~~ΕΝΑΝ~~ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΤΡΙΠΛΑ ΟΡΙΖΟΥΜΕ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $(x, y, z) = (x, (y, z))$

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$$

- ΓΕΝΙΚΑ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΟΙ n -ΑΙΔΕΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙ ΩΣ ΕΞΗΣ:

ΕΣΤΩ $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΟΛΑ. ΟΡΙΖΟΥΜΕ $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=}$

$$(x_1, (x_2, x_3, \dots, x_{n+1})) \text{ ΓΙΑ } n=2 \text{ ΚΑΙ ΓΙΑ ΚΑΘΕ } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{ΚΑΙ } (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \iff x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

- $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x, y \in \mathbb{R} \rightarrow x+y = +(|x, y|)$$

Γνωρίζω ότι έχουμε 3 σύνολα X, Y, Z , μια συνάρτηση

$f: X \times Y \rightarrow Z$ ονομάζεται πράξη στο Z

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σύνολο V ονομάζεται διανυσματικός χώρος όπου έχουν οριστεί σε αυτόν 2 πράξεις: η πρόσθεση $+: V \times V \rightarrow V$ και ο αριθμητικός πολλαπλασιασμός $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ με τις εξής ιδιότητες

$$1) \forall u, v \in V \quad u+v = v+u$$

$$2) \forall u, v, w \in V \quad (u+v)+w = u+(v+w)$$

$$3) \text{Υπάρχει ένα στοιχείο } 0 \in V : 0+u = u+0 = u \quad \forall u \in V$$

$$4) \forall u \in V \text{ υπάρχει το } u' \in V : u+u' = u'+u = 0$$

$$\text{Ζητούμαστε το } u' = -u$$

$$5) \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, w \in V \text{ ισχύει: } \lambda(u+w) = \lambda u + \lambda w$$

$$6) \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ και } u \in V \text{ ισχύει: } (\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$$

$$7) \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, u \in V \text{ ισχύει: } (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$$

$$8) 1 \cdot u = u$$

Με τις 1), 2), 3), 4) το V με την πρόσθεση γίνεται αβελιανή ομάδα.

Παραδείγματα

$$1. (\mathbb{R}, +, \cdot) \quad \delta. x$$

$$2. (\mathbb{R}^3, +, \cdot) \quad \delta. x$$

από $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

$\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\forall (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$

Με τις πράξεις αυτές το $\mathbb{R}^3$ γίνεται δ.γ.

3. Γνωρίζουμε ότι $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ γίνεται διανυσματικός χώρος με τις εξής πράξεις:

$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

~~$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$~~

$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Αξίωμα

$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3\}$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$

ΟΡΙΣΜΟΙ

1) Έστω V ένας δ.γ και $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$.

Ένας γραμμικός συνδυασμός των $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι ένα διάνυσμα της

μορφής $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

2) Έστω $A \in V$. Ονομάζουμε γραμμική διάνυσμα του A και συμβολίζουμε $\langle A \rangle$ το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών από στοιχεία του A . Συγκεκριμένα:

$\langle A \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \mid u_1, \dots, u_n \in A, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$

3) Έστω $u_1, \dots, u_n \in V$. Αυτά ονομάζονται γραμμικά ανεξάρτητα

αν η σχέση $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

4) Ένα υποκείμενο $\Gamma \subseteq V$ ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο εάν οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων του είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

5) Ονομάζουμε βάση ενός δ.χ. V ~~ενα~~ ένα υποκείμενο $B \subseteq V$ τέτοιο ώστε

α. $\langle \cdot, \cdot, B \rangle = V$

β. Το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Αν το B είναι πεπερασμένο ^{τότε ο V} ονομάζεται πεπερασμένης διάστασης
αν το B είναι άπειρο τότε ο V ονομάζεται άπειρης διάστασης.

Παραδείγματα

0. δ.χ. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ είναι διάστασης n . Μια βάση τους είναι τα

~~$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$~~

$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$

τότε το $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι βάση.

↑
n-οστή βάση

1) Έστω V δ.χ. μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο αν ικανοποιεί τα εξής

$$1. \langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in V$$

$$2. \langle Ax, y \rangle = A \langle x, y \rangle \quad \forall A \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V$$

$$3. \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in V$$

$$4. \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$$

$$\text{Ονομάζουμε } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ μήκος του } x$$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

Έστω V δ.χ και $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ένα εσωτερικό γινόμενο στον V

Τότε $\forall u, v \in V$ ισχύει $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

[Απόδειξη]

Θέτουμε $a = \|u\|$ και $b = \|v\|$ και $c = au - bv \in V$

Από την 4. για $x = c$ έχουμε $\langle c, c \rangle \geq 0$ (1)

$$\langle au - bv, au - bv \rangle = \langle au - bv, au \rangle + \langle au - bv, -bv \rangle =$$

$$= \langle au, au \rangle + \langle -bv, au \rangle + \langle au, -bv \rangle + \langle -bv, -bv \rangle =$$

$$= \|au\|^2 + \langle -bv, au \rangle + \langle au, -bv \rangle + \|bv\|^2 =$$

$$\langle au, au \rangle + \langle -bv, au \rangle + \langle au, -bv \rangle + \langle -bv, -bv \rangle =$$

$$= a^2 \|u\|^2 + b^2 \|v\|^2 - 2ab \langle v, u \rangle - ab \langle u, v \rangle =$$

$$= 2a^2 b^2 - 2ab \langle u, v \rangle = 2ab (ab - \langle u, v \rangle)$$

$$(1) \Rightarrow 2ab (ab - \langle u, v \rangle) \geq 0 \Rightarrow ab \geq \langle u, v \rangle \Rightarrow \langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\|$$

Αν βάλω στον v το $-v$ θα βγάλω ότι

$$-\langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\|$$

$$\text{Άρα συνολικά } |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Ερω οποιως $\|au\|^2 = \langle au, au \rangle = a^2 \langle u, u \rangle = |a|^2 \|u\|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|au\| = |a| \|u\|$

Τριγωνική Ανισότητα

Για $u, v \in V$ $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Απόδειξη

$\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle u+v, u+v \rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|$

$\begin{aligned} \bullet \langle u, u+v \rangle + \langle v, u+v \rangle &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2. \end{aligned}$

Άρα $\|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$ που ισχύει λόγω C-S

Ορίζουμε το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ όπου αν $u = (u_1, u_2, u_3)$ $\left. \begin{array}{l} \\ v = (v_1, v_2, v_3) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^3$

ορίζουμε $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

Άσκηση

Δείξτε ότι το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι πράγματι εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$

